الاستدلال البيزي لنموذج ديربن الحيزي غير الطبيعي	**تواريخ البحث** تاريخ تقديم البحث : 15/ 7 /2024 تاريخ قبول البحث: 18 / 8/2024 تاريخ رفع البحث على الموقع: 15/9/2024
المدرس الدكتور سرمد عبد الخالق صالح	
قسم الرياضيات – كلية التربية للعلوم الصرفة – جامعة الحمدانية- العراق	
المدرس الدكتور عمر رمزي جاسم	
قسم ادارة الاعمال- كلية الادارة والاقتصاد- جامعة الحمدانية- العراق	

المستخلص :

في اغلب البحوث والدراسات العلمية يتم البحث عن صفة الاستقلالية كونها فرضية من الفرضيات الواجب تحقيقها عند استخدام التحليل التقليدي لنماذج الانحدار، الا ان وجود الارتباط الذاتي بين مشاهدات الظاهرة المدروسة يجب أن ياخذها بنظر الاعتبار عند عملية التحليل. وعليه تم في البحث تقدير معلمات احد نماذج الانحدار الذاتي الحيزي والمتمثل بنموذج ديربن الحيزي باسلوب بيز عند توفر معلومات مسبقة غير خبرية تحت دالة الخسارة التربيعية عندما يكون خطأ النموذج يتبع توزيع t متعدد المتغيرات وعندما تكون معلمة التباين ودرجة الحرية معلومة فضلاً عن استعمال عامل بيز كمعيار لاختبار الفرضيات حول متجه المعلمات (β)، وطبقت النتائج التي تم التوصل اليها على بيانات مولدة من نموذج ديربن الحيزي عندما يتبع متجه الاخطاء توزيع t متعدد المتغيرات مقترحين ثمانية عشر حالة للنموذج والمقارنة بين المقدرات بالاعتماد على معيار متوسط مربعات الخطأ. واستنتج الباحثان بان مقدر بيز عند توفر معلومات مسبقة غير خبرية هو نفس مقدر الامكان الاعظم فضلاً عن تفوق النموذج السابع عشر المقترح في عملية التقدير اي بمعنى تزداد كفاءة المقدرات عند زيادة حجم العينة ودرجة الحرية.

الكلمات المفتاحية: نموذج ديربن الحيزي، اسلوب بيز، المعلومات المسبقة غير الخبرية، معيار عامل بيز.

"Bayesian Inference for the Non-normal Spatial Durbin Model"

Lecturer - PhD **Sarmad Abdulkhaleq Salih**

Department of Mathematics - College of Education for Pure Sciences - Al-Hamdaniya

Lecturer - PhD **Omar Ramzi Jasim**

Department of Business Administration - College of Administration and Economics - Al-Hamdaniya

University - Iraq

Abstract :

In most scientific research and studies, the characteristic of independence is searched for as it is one of the hypotheses that must be achieved when using traditional analysis of regression models. However, the existence of Auto correlation between observations of the studied phenomenon must be taken into account during the analysis process. Accordingly, in the research, the parameters of one of the spatial autoregressive models, represented by the spatial Durbin model, were estimated using the Bayesian method when non-experimental prior information was available under the quadratic loss function, when the model error followed a multivariate t-distribution, and when the variance parameter and the degree of freedom were known, In addition to using the Bayes factor as a test criterion. Assumptions about the parameter vector β, and the results reached were applied to data generated from the Durbin spatial model when the error vector follows a multivariate t distribution, proposing eighteen cases for the model and comparing the estimators based on the mean square error criterion. The researchers concluded that the Bayes estimator, when non-characteristic prior information is available, is the same as the maximum likelihood estimator, in addition to the superiority of the proposed seventeenth model in the estimation process, meaning that the efficiency of the estimators increases when the sample size and degree of freedom increase.

Keywords: spatial Durbin model, Bayesian method, non-informative prior information, Bayesian factor criterion

المقدمة :

تُعد نماذج الانحدار الحيزية تطويراً لنماذج الانحدار الخطية البسيطة او المتعددة عندم يكون هنالك تأثير حيزي على المشاهدات. وغالباً ما يكون هذا التأثير في نماذج الانحدار الحيزية على شكل عدم تجانس بمعنى هناك ارتباطات بين المشاهدات للظاهرة قيد الدراسة. وكما هو الحال في تحليل نماذج السلاسل الزمنية اذ يكون مؤشر الزمن هو المتغير الفعال والمفسر لاستجابات المشاهدات بدلاً عن المتغيرات التوضيحية. بشكل عام، هناك عدة أنواع من النماذج الحيزية منها نموذج الانحدار الذاتي الحيزي ((Spatial Auto Regression Model (SAR)، نموذج الخطأ الحيزي ((SEM) (Spatial Error Model)، نموذج ديربن الحيزي ((Spatial Durbin Model (SDM) ونموذج الاوساط المتحركة الذاتية الحيزية ((Spatial ARMA Model (SARMA).

أن نموذج ديربن الحيزي (SDM) هو نموذج انحدار ذاتي تم تطويره من نموذج الانحدار الذاتي الحيزي اذ يأخذ نموذج الانحدار الذاتي الحيزي فقط تأثير التاخر الحيزي على المتغيرات التوضيحية، بينما يأخذ نموذج ديربن الحيزي تأثير التأخر الحيزي على المتغيرات التوضيحية ومتغير الاستجابة. ولاهمية نموذج ديربن الحيزي قدر [2] معلمات النموذج من خلال استعمال الطرق التقليدية المناسبة والمتمثلة بطريقة الامكان الاعظم ، العزوم وبيز عندما يكون خطأ النموذج طبيعياً والتطبيق على ايرادات ضريبة الاعلانات في مدينة مالانج وبالاعتماد على معايير المقارنة توصل الباحث الى كفاءة طريقة الامكان الاعظم عند تقدير معلمات النموذج.

في حين طبقا [11] الطريقة البيزية لتقدير معلمات نموذج ديربن الحيزي بوجود حد العتبة وعندما يتبع متجه الخطأ العشوائي التوزيع الطبيعي المتعدد بالاعتماد على تطوير خوارزمية ((Markov Cain Monte Carlo (MCMC) لتقدير نموذج ديربن الحيزي ومن خلال الدراسة التجريبة استنتج الباحث عند زيادة حجم العينة تزداد كفاءة المقدرات.

استعمل [3] نموذج الانحدار الخطي الاعتيادي ونموذج ديربن الحيزي لدراسة عوامل تأثير مرض الإسهال والمقارنة بين النموذجين في منطقة توبان، جاوة الشرقية وإندونيسيا وتوصل البحث الى أن نموذج ديربن الحيزي يُعطي أداء أفضل من نموذج الانحدار الخطي الاعتيادي في معرفة العوامل المؤثرة على مرض الاسهال، اذ أظهرت نتائج نموذج ديربن الحيزي أن معلمة التأخر الحيزي في المتغيرات الاستجابة والتوضيحية لها أثر كبير وكانت المتغيرات المستقلة هي مصدر مياه الشرب والمركز الصحي والعاملين في المجال الطبي.

تم هذا البحث استعراض مقدمة عامة عن النماذج الحيزية في المبحث الاول في حين تناول المبحث الثاني وصف نموذج ديربن الحيزي عندما يتبع حد الخطأ توزيع t متعدد المتغيرات. في المبحث الثالث تم مناقشة بعض مصفوفات التجاورات (الاوزان) الحيزية، واشتمل المبحث الرابع التقدير البيزي لمتجه معلمة الموقع عندما تكون المعلومات المسبقة غير الخبرية متوفرة واستعمال عامل بيز كمعيار لاختبار الفرضيات حول متجه معلمة الموقع لنموذج الدراسة في المبحث الخامس وتم دراسة محاكاة لنموذج ديربن الحيزي في المبحث السادس واستعرض اهم الاستنتاجات النظرية والتجريبية للبحث في المبحث السابع.

1. نموذج ديربن الحيزي عندما يتبع حد الخطأ توزيع t متعدد المتغيرات:

يعتبر نموذج ديربن الحيزي احد نماذج الانحدار الذاتي الحيزي (SAM) الذي يكون فيه حالة متغير الاستجابة متخلف حيزياً اي بمعنى وجود معلمة التحيز التي تصف قوة الاعتماد الحيزي لمتغير الاستجابة اما نموذج ديربن الحيزي يكون الاعتماد الحيزي ليس فقط في متغير الاستجابة ولكن ايضاً يكون في المتغيرات التوضيحية اي تكون مصفوفة المتغيرات التوضيحية بالشكل (XWX)، والمعادلة الاتية تمثل الصيغة الرياضية لنموذج ديربن الحيزي (SDM): **[1] [9] [10]**

$$\underline{Y}_{n\times1} = \lambda\, W_{n\times n}\, \underline{Y}_{n\times1} + X_{n\times(m+1)}\underline{\beta_1}_{(m+1)\times1} + W_{n\times n}X_{n\times(m+1)}\underline{\beta_2}_{(m+1)\times1} + \underline{E}_{n\times1} \qquad \dots(1)$$

اذ ان(Y) يمثل متجة متغير الاستجابة و (λ) تمثل معلمة التأثير الحيزي والتي تكون محصورة بين $(-1,1)$ والتي تشير الى قوة الاعتمادية الحيزية و(W) تمثل مصفوفة التجاورات او الاوزان الحيزية، في حين $(W\underline{Y})$ تمثل متجة متغير الاستجابة المتخلف حيزياً و (WX) تمثل مصفوفة المتغيرات التوضيحية المتخلفة حيزياً وان $\underline{\beta_1}$ تشير الى متجه المعلمات بدون اوزان و $\underline{\beta_2}$ تشير الى متجه المعلمات بوجود مصفوفة الاوزان و $(\underline{E})$ متجه الاخطاء العشوائية، وان (m) تمثل عدد المتغيرات التوضيحية.

وبالامكان كتابة نموذج ديربن الحيزي المعرف في المعادلة (1) بصيغة اخرى وكما موضحة ادناه:**[1]**

$$\underline{Y}_{n\times1} = \lambda\, W_{n\times n}\, \underline{Y}_{n\times1} + Z_{n\times(m+1)}\underline{\beta}_{(m+1)\times1} + +\underline{E}_{n\times1} \qquad \dots(2)$$

اذ ان: $Z = [X \quad WX]$

وبافتراض متجه الخطأ العشوائي $(\underline{E})$ يتبع توزيع t متعدد المتغيرات الذي ينتج من خلط التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات مع توزيع معكوس كاما وبالشكل الاتي:

$$(\underline{E}|\tau) \sim N(0, \sigma^2\tau\, I_n)$$

وان دالة الكثافة الاحتمالية لـ $(\underline{E}|\tau)$ تكون كالاتي:

$$f(\underline{E}|\tau) = \frac{1}{(2\,\pi\,\tau\,\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2\tau\sigma^2}\underline{E}'\underline{E}} \quad , \quad -\infty < \underline{E} < \infty \qquad \dots(3)$$

المعادلة (3) تمثل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات و (τ) يمثل متغير عشوائي يتبع توزيع معكوس كاما بالمعلمات $(\frac{r}{2},\frac{r}{2})$ وان دالة الكثافة الاحتمالية معرفة بالشكل الاتي: **[8]**

$$P(\tau)=\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{r/2}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}\,\tau^{-\frac{r}{2}-1}\,e^{-\frac{r}{2\tau}} \quad , \qquad \tau>0 \qquad \dots(4)$$

ومن خلال مفهوم نظرية بيز وخلط المعادلتين (3) و (4) نحصل على دالة كثافة احتمال توزيع t متعدد المتغيرات لمتجة الاخطاء العشوائية وكالاتي: **[6]**

$$f(\underline{E})=\int_{\tau} f(\underline{E}|\tau)\,P(\tau)\,d\tau$$

$$f(\underline{E})=\frac{\Gamma\left(\frac{r+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)\,(\sigma^2\,\pi)^{\frac{n}{2}}\,r^{\frac{n}{2}}}\left[1+\frac{1}{r\sigma^2}\,\underline{E}'\underline{E}\right]^{-\left(\frac{r+n}{2}\right)} \qquad \dots(5)$$

وتوصف المعادلة (5) بالشكل الاتي:

$$\underline{E}\sim t\,(0,\sigma^2 I_n\,,r)$$

وبما انه متجه الاخطاء العشوائية المعرف في المعادلة (2) عبارة عن تركيبة خطية بدلالة متجه متغير الاستجابة المتخلف حيزياً فان دالة الكثافة الاحتمالية لـ $(\underline{Y})$ ايضاً تتبع توزيع t متعدد المتغيرات وكالاتي: **[6]**

$$f(\underline{Y})=\frac{\Gamma\left(\frac{r+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)\,(\sigma^2\,\pi)^{\frac{n}{2}}\,r^{\frac{n}{2}}}\left[1+\frac{1}{r\sigma^2}\left(\underline{Y}-\lambda\,W\underline{Y}-Z\underline{\beta}\right)^T\left(\underline{Y}-\lambda\,W\underline{Y}-Z\underline{\beta}\right)\right]^{-\left(\frac{r+n}{2}\right)} \qquad \dots(6)$$

وبفرض ان $B=(I-\lambda W)$، واجراء بعض العمليات الرياضية فان المعادلة (6) تكون كما في الشكل الاتي:

$$f(\underline{Y})=\frac{\Gamma\left(\frac{r+n}{2}\right)|B'B|^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)\,(\sigma^2\,\pi)^{\frac{n}{2}}\,r^{\frac{n}{2}}}\left[1+\frac{1}{r\sigma^2}\left(\underline{Y}-B^{-1}Z\underline{\beta}\right)'\,B'B\,\left(\underline{Y}-B^{-1}Z\underline{\beta}\right)\right]^{-\left(\frac{r+n}{2}\right)} \qquad \dots(7)$$

وبالإمكان وصف المعادلة (7) بالشكل الاتي:

$$\underline{Y}\sim t\left(B^{-1}Z\underline{\beta}\,,\sigma^2\,(B'B)^{-1},r\right)$$

2. مصفوفة التجاورات (الاوزان) الحيزية:

تعرف مصفوفة التجاورات على انها مصفوفة مبنية على اساس التجاورات اي علاقات التجاور لكل موقع (منطقة) مع المواقع الاخرى وهي مصفوفة مربعة وليس من الضروري ان تكون مصفوفة متماثلة، وهنالك العديد من مصفوفة التجاورات الحيزية نذكر منها مصفوفة التجاور (Bishop Matrix) ومصفوفة التجاور الخطي (Linear Matrix) ومصفوفة التجاور (Rook Matrix) والتي سيتم استعمالهم في مبحث دراسة المحاكاة.**[1]**

- **مصفوفة التجاور(Bishop):**

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots (8)$$

- **مصفوفة التجاور الخطي (Linear):**

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots (9)$$

- **مصفوفة التجاور(Rook):**

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots (10$$

3. التقدير البيزي لمعلمات نموذج ديربن الحيزي غير الطبيعي:

في هذا المبحث سيتم تقدير متجه معلمة الموقع لنموذج ديربن الحيزي عندما يتبع الخطأ توزيع t متعدد المتغيرات باسلوب بيز وعندما يكون الاحتمال السابق غير قياسي في أغلب الحالات ولكن في سنة 1961 توصل العالم جيفري إلى إيجاد صيغة قياسية للاحتمال السابق ذو المعلومات القليلة. وفي ظل نموذج ديربن الحيزي المعرف في المعادلة (2) إذ أن التوزيع السابق لـ $\underline{\beta}$ و σ^2 يتناسب مع الجذر التربيعي لمحدد مصفوفة المعلومات. وتعرف كالآتي:**[4] [7]**

$$I\left(\underline{\varphi}\right) = -E_{\underline{Y}}\left(\frac{\partial^2 ln\, f\left(\underline{Y}\,\middle|\,\underline{\varphi}\right)}{\partial\underline{\varphi}\,\partial\underline{\varphi}'}\right) \qquad \ldots (11)$$

إذ أن $\underline{\quad} = \left(\underline{\beta}', \sigma^2\right)'$.

وتكون مصفوفة المعلومات مربعة ومتماثلة واكيدة الايجابية، وعلى أساس تلك المعلومات سيتم تقدير متجه معلمة موقع النموذج المُسبق تعريفه في المعادلة (2).

المشروطة $\left(\underline{Y}\right)$ واستناداً الى مفهوم التوزيعات الخليطة نأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي دالة الكثافة الاحتمالية لـ والتي تتبع التوزيع الطبيعي المتعدد والمعرفه في المعادلة الاتية:(τ)بالمتغير العشوائي

$$f\left(\underline{Y}|\tau\right) = \frac{|B'B|^{\frac{1}{2}}}{(2\,\pi\,\tau\,\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}\; e^{-\frac{1}{2\tau\,\sigma^2}\left(\underline{Y}-B^{-1}Z\underline{\beta}\right)' B'B\left(\underline{Y}-B^{-1}Z\underline{\beta}\right)} \qquad \dots(12)$$

$$\ln f\left(\underline{Y}|\tau\right) = \ln|B'B|^{\frac{1}{2}} - \frac{n}{2}\ln(2\,\pi\,\tau\,\sigma^2) - \frac{1}{2\,\tau\,\sigma^2}\left(\underline{Y} - B^{-1}Z\underline{\beta}\right)'\; B'B\;\left(\underline{Y} - B^{-1}Z\underline{\beta}\right)$$

وأخذ المشتقة الجزئية الاولى نسبة الى $\left(\underline{\beta}\right)$ نحصل على الاتي:

$$\frac{\partial \ln Lf\left(\underline{Y}|\tau\right)}{\partial \underline{\beta}} = \frac{2\,Z'B\,\underline{Y} - 2Z'Z\,\underline{\beta}}{2\,\tau\,\sigma^2} \qquad \dots(13)$$

الشرطي وحسب نظرية بيز فان مقدر $\left(\underline{\beta}\right)$ وبعد مساواة المعادلة (13) بالصفر نحصل على مقدر الامكان الاعظم لـ يكون بالشكل الاتي:(τ) غير المشروط بـ $\left(\underline{\beta}\right)$الامكان الاعظم لـ

$$\underline{\hat{\beta}} = (Z'Z)^{-1}Z'\underline{Y} - \lambda\,(Z'Z)^{-1}Z'\,W\,\underline{Y} \qquad \dots(14)$$

المقدر في المعادلة (14) مساوياً لمقدر الامكان الاعظم لنموذج ديربن الحيزي عندما يتبع الخطأ التوزيع الطبيعي المتعدد.

نحصل (τ)المتغير العشوائي) نسبة الى13المشتقة الجزئية الثانية والتوقع الرياضي لطرفي المعادلة (وبعد أخذ على التالي:

$$\frac{\partial^2 ln\, f\left(\underline{Y}\,|,\tau\right)}{\partial\underline{\beta}\partial\underline{\beta}'} = -\frac{Z'Z}{\sigma^2\tau} \qquad \dots(15)$$

$$I_{\underline{Y}}\left(\underline{\beta}\right) = \frac{Z'Z}{\sigma^2}\cdot\frac{r}{r-2} \qquad \dots(16)$$

هو:$\left(\underline{\beta}\right)$لذلك فإن التوزيع الاحتمالي السابق لـ

$$P\left(\underline{\beta}\right) \propto Constant \qquad \dots(17)$$

المشروط بالمتغير $\left(\underline{\beta}\right)$ بعد دمج المعادلة (17) مع المعادلة (12) فإن نواة التوزيع الاحتمالي اللاحق لمتجه المعلمات (τ):يكون كالاتي

$$P\left(\underline{\beta}\middle|\underline{Y},\tau,\sigma^2\right) \propto P\left(\underline{\beta}\right)\ f\left(\underline{Y}\middle|,\tau\right)$$

$$\propto\ e^{-\frac{1}{2\tau\,\sigma^2}\left(\underline{Y}-B^{-1}Z\underline{\beta}\right)'B'B\left(\underline{Y}-B^{-1}Z\underline{\beta}\right)} \qquad \dots(18)$$

الى الشكل التربيعي للمعادلة (18) وإجراء بعض العمليات الرياضية فان التوزيع $\left(B^{-1}Z\hat{\underline{\beta}}\right)$ باضافة وطرح المقدار الشرطي يكون كالاتي:$\left(\underline{\beta}\right)$الاحتمالي اللاحق لـ

$$P\left(\underline{\beta}\middle|\underline{Y},\tau,\sigma^2\right) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}}\,(\sigma^2\tau)^{-\frac{m}{2}}\left|Z'Z\right|^{1/2}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}\left(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}}\right)'Z'Z\left(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}}\right)} \qquad \dots(19)$$

استناداً الى مفهوم نظرية بيز فان التوزيع الاحتمالي اللاحق لـ $\left(\underline{\beta}\right)$ غير الشرطي يكون كالآتي:

$$P\left(\underline{\beta}\middle|\underline{Y},\sigma^2\right) = \int_{\tau} P\left(\underline{\beta}\middle|\underline{Y},\tau,\sigma^2\right)\,P(\tau)d\tau \qquad \dots(20)$$

$$P\left(\underline{\beta}\middle|\underline{Y},\sigma^2\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+m}{2}\right)\left|Z'Z\right|^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)\,(\sigma^2\,\pi)^{\frac{m}{2}}\ r^{\frac{m}{2}}}\left[1+\frac{1}{r\sigma^2}\left(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}}\right)'Z'Z\left(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}}\right)\right]^{-\left(\frac{r+m}{2}\right)} \qquad \dots(21)$$

وان التوزيع الاحتمالي اللاحق لـ $\left(\underline{\beta}\right)$ يمثل توزيع t متعدد المتغيرات ويوصف بالشكل الاتي:

$$\underline{\beta} \sim t_m\left(\hat{\underline{\beta}},\sigma^2\,(Z'Z)^{-1},r\right)$$

وعليه فان المقدر البيزي تحت دالة الخسارة التربيعية يمثل متوسط التوزيع الاحتمالي اللاحق لـ $\left(\underline{\beta}\right)$ ويكون كالاتي:

$$\hat{\underline{\beta}}_{bayes} = \hat{\underline{\beta}} = (Z'Z)^{-1}Z'\underline{Y} - \lambda\,(Z'Z)^{-1}Z'\,W\,\underline{Y} \qquad \dots(22)$$

نلاحظ من المعادلة(22) فان المقدر البيزي عندما تكون المعلومات المسبقة غير خبرية هو نفس مقدر الامكان الاعظم المعرف في المعادلة (14).

4. اختبار الفرضيات البيزية:

يعتبر معيار عامل بيز ((Bayes factor(BF)) احد المعايير المستعملة في اختبار الفرضيات بالاسلوب البيزي ويعرف على أنه قسمة التوزيع الاحتمالي اللاحق بالنسبة للفرضية الصفرية (H_0) على التوزيع الاحتمالي اللاحق بالنسبة للفرضية البديلة (H_A)، ويعبر عن هذا المعيار رياضياً بالشكل الآتي:**[4] [5]**

$$B.F. = \frac{P(\underline{Y}|H_0)}{P(\underline{Y}|H_1)} \qquad \dots (23)$$

في سنة (1961) قدم العالم جيفري جدول يوضح فيه الأفضلية بالنسبة لفرضية (H_0) من عدمها. **[4]**

الجدول (1): قيم معيار .B.F لتفضيل فرضية H_0

مؤشر سلبي	B.F.<1	Negative
مؤشر ضعيف	1≤ B.F.<3	Barely worth mentioning
مؤشر إيجابي	3≤ B.F.<12	Positive
مؤشر قوي	12≤ B.F.<150	Strong
مؤشر حاسم	B.F.>150	Very strong

وعليه يجب إيجاد قيمة معيار عامل بيز للفرضية الاتية:

$$\begin{aligned} H_0 &: \underline{\beta} = \underline{\beta}_0, \quad \sigma^2 = \sigma^2{}_0 \\ H_A &: \underline{\beta} \neq \underline{\beta}_0, \quad \sigma^2 = \sigma^2{}_0 \end{aligned} \qquad \dots (24)$$

ومقارنة قيمة معيار عامل بيز مع القيم الموضوعة في الجدول (1).

تحت الفرضية الإحصائية المعرفة في المعادلة (24) وباستعمال المعادلة (23) يكون المعيار بالشكل الآتي:

$$B.F. = \frac{\int_0^\infty f\left(\underline{Y}\middle|\underline{\beta}_0, \sigma^2{}_0, \tau\right) P(\tau)\ d\tau}{\int_0^\infty \int_{\underline{\beta}} f\left(\underline{Y}\middle|\underline{\beta}, \sigma^2{}_0, \tau\right) P(\tau)\ P\left(\underline{\beta}\right) d\underline{\beta}\ d\tau} = \frac{L_0}{L_1} \qquad \dots (25)$$

$$L_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{r+n}{2}\right)|B'B|^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)(\sigma^2{}_0\,\pi)^{\frac{n}{2}}\ r^{\frac{n}{2}}}\left[1 + \frac{1}{r\,\sigma^2{}_0}\left(\underline{Y} - B^{-1}Z\underline{\beta}_0\right)' B'B\left(\underline{Y} - B^{-1}Z\underline{\beta}_0\right)\right]^{-\left(\frac{r+n}{2}\right)} \qquad \dots (27)$$

$$L_1 = \int_0^\infty |B'B|^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^2{}_0\tau)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{\left(\underline{Y}-B^{-1}Z\hat{\underline{\beta}}\right)' B'B\left(\underline{Y}-B^{-1}Z\hat{\underline{\beta}}\right)}{2\,\sigma^2{}_0\tau}}\ \frac{(2\pi)^{\frac{m}{2}}(\sigma^2{}_0\tau)^{\frac{m}{2}}}{|Z'Z|^{\frac{1}{2}}}\ P(\tau)\, d\tau$$

$$L_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{r+n+m}{2}\right)\left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{r}{2}}|B'B|^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}({\sigma^2}_0)^{-\frac{n}{2}}\left|Z'Z\right|^{-\frac{1}{2}}}{\left(r+\frac{\frac{\left(\underline{Y}-B^{-1}Z\underline{\hat{\beta}}\right)' B'B\left(\underline{Y}-B^{-1}Z\underline{\hat{\beta}}\right)}{{\sigma^2}_0}}{2}\right)^{\frac{r+n+m}{2}}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)({\sigma^2}_0\ 2\pi)^{-\frac{m}{2}}} \quad \ldots(28)$$

(نحصل على معيار عامل بيز لاختبار الفرضية (24):(25) في المعادلة (28) و(26 وبتعويض كل من المعادلتين)

$$B.F. = \frac{\frac{\Gamma\left(\frac{r+n}{2}\right)|B'B|^{\frac{1}{2}}}{({\sigma^2}_0\,\pi)^{\frac{n}{2}}\ r^{\frac{n}{2}}}\left[1+\frac{1}{r\,{\sigma^2}_0}\left(\underline{Y}-B^{-1}Z\underline{\beta}_0\right)' B'B\left(\underline{Y}-B^{-1}Z\underline{\beta}_0\right)\right]^{-\left(\frac{r+n}{2}\right)}}{\frac{\Gamma\left(\frac{r+n+m}{2}\right)\left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{r}{2}}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}({\sigma^2}_0)^{-\frac{n}{2}}\left|Z'Z\right|^{-\frac{1}{2}}}{\left(r+\frac{\frac{\left(\underline{Y}-B^{-1}Z\underline{\hat{\beta}}\right)' B'B\left(\underline{Y}-B^{-1}Z\underline{\hat{\beta}}\right)}{{\sigma^2}_0}}{2}\right)^{\frac{r+n+m}{2}}({\sigma^2}_0\ 2\pi)^{-\frac{m}{2}}}} \quad \ldots(29)$$

اذا ان $\left(\underline{\hat{\beta}}\right)$ تمثل مقدر الامكان الاعظم والمعرف في المعادلة (14).

5. دراسة المحاكاة:

في هذا المبحث ومن خلال استعمال برنامج الـ Matlab R2019a تم توليد بيانات عشوائية لنموذج ديربن الحيزي بالاعتماد على توزيع t متعدد المتغيرات وبافتراض ان خط الانحدار يمر من نقطة الاصل $((\beta_0 = 0))$ وان عدد المتغيرات التوضيحية المستعملة $(m = 2)$ وباقتراح حالات مختلفة لنموذج الدراسة وحسب الجدول (2) الاتي:

الجدول (2): القيم المفترضة لنموذج ديربن الحيزي

النماذج المقترحة	نوع مصفوفة التجاور	مصفوفة التجاورات الحيزية W	درجة الحرية (r)	عدد المشاهدات (n)	معلمة التاثير الحيزي (λ)	β_0	$\sigma_0{}^2$
الاول	Bishop	$\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$	4	50	0.9821	$\begin{bmatrix}4.2541\\7.3251\end{bmatrix}$	2.5
الثاني	خطية	$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$					
الثالث	Rook	$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}$					
الرابع	Bishop	$\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$	7				
الخامس	خطية	$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$					
السادس	Rook	$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}$					
السابع	Bishop	$\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$	10				
الثامن	خطية	$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$					
التاسع	Rook	$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}$					
العاشر	Bishop	$\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$	4	150			
الحادي عشر	خطية	$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$					
الثاني عشر	Rook	$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}$					

الثالث عشر	Bishop	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	7				
الرابع عشر	خطية	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$					
الخامس عشر	Rook	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$					
السادس عشر	Bishop	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	10				
السابع عشر	خطية	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$					
الثامن عشر	Rook	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$					

وعند تطبيق الجدول (2) يتم الحصول على ثمانية عشر نموذج مقترح للنموذج المدروس وسيتم تكرار التجربة (R=1000) مرة.

1.6: التقدير البيزي لنموذج ديربن الحيزي غير الطبيعي:

تم استخدام طريقة بيز بالاعتماد على المعلومات المسبقة غير الخبرية لإيجاد مقدر متجه المعلمات $\left(\underline{\beta}\right)$ وتحت افتراض ثمانية عشر حالة لنموذج ديربن الحيزي وعندما يتبع الخطأ توزيع t متعدد المتغيرات والمُعرفة في الجدول (2) وستتم المقارنة بين المقدرات بالاعتماد على معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE)، والجدول (3) يوضح قيم معيار MSE لـ $\underline{\hat{\beta}}_{bayes}$.

الجدول (3): قيم معيار MSE لمقدرمتجه المعلمات $\underline{\beta}$ باستعمال طريقة بيز

النموذج	$\hat{\underline{\beta}}_{bayes}$	MSE	ترتيب افضلية النماذج المقترحة
الاول	$\begin{bmatrix}3.9254\\6.4520\end{bmatrix}$	0.3451	**18**
الثاني	$\begin{bmatrix}4.0012\\7.9210\end{bmatrix}$	0.3205	**16**
الثالث	$\begin{bmatrix}2.9651\\5.9541\end{bmatrix}$	0.3325	**17**
الرابع	$\begin{bmatrix}3.8410\\6.3251\end{bmatrix}$	0.2950	**15**
الخامس	$\begin{bmatrix}3.5124\\6.3541\end{bmatrix}$	0.2014	**13**
السادس	$\begin{bmatrix}5.1422\\8.6521\end{bmatrix}$	0.2532	**14**
السابع	$\begin{bmatrix}4.0451\\7.0324\end{bmatrix}$	0.2092	**12**
الثامن	$\begin{bmatrix}4.6851\\6.9951\end{bmatrix}$	0.1953	**10**
التاسع	$\begin{bmatrix}4.8540\\7.7421\end{bmatrix}$	0.1992	**11**
العاشر	$\begin{bmatrix}4.0501\\7.8551\end{bmatrix}$	0.1452	**9**
الحادي عشر	$\begin{bmatrix}3.9221\\8.0455\end{bmatrix}$	0.1235	**7**
الثاني عشر	$\begin{bmatrix}3.7441\\9.0251\end{bmatrix}$	0.1259	**8**
الثالث عشر	$\begin{bmatrix}4.0591\\7.2001\end{bmatrix}$	0.1066	**6**
الرابع عشر	$\begin{bmatrix}4.7841\\7.1351\end{bmatrix}$	0.0923	**4**
الخامس عشر	$\begin{bmatrix}3.9985\\7.0014\end{bmatrix}$	0.0999	**5**
السادس عشر	$\begin{bmatrix}4.0501\\7.6255\end{bmatrix}$	0.0841	**3**
السابع عشر	$\begin{bmatrix}4.1952\\7.3104\end{bmatrix}$	0.0045	**1**
الثامن عشر	$\begin{bmatrix}4.1952\\7.4210\end{bmatrix}$	0.0642	**2**

نلاحظ من الجدول (3) تفوق النموذج المقترح السابع عشر على بقية النماذج في تقدير متجه المعلمات $\left(\underline{\beta}\right)$ بالاعتماد على معيار متوسط مربعات الخطأ اي بمعنى تزداد كفاءة المقدر كلما زادت حجم العينة وقيمة درجة الحرية ولجميع النماذج المقترحة وكانت عند مصفوفة التجاور الخطي(**Linear**) وتليها مصفوفة التجاور (**Rook**) واخيراً مصفوفة التجاور (**Bishop**).

2.6: اختبار الفرضيات البيزية:

لاختبار الفرضية الإحصائية المعرفة في المعادلة (24) سيتم حساب معيار عامل بيز والذي عُرف في المعادلة (28) ومن ثم مقارنة قيم المعيار المحسوبة مع القيم الموضحة في الجدول (1). الجدول (4) يبين قيم معيار عامل بيز بالاعتماد على المعلومات المسبقة غير الخبرية:

الجدول (4): قيم معيار عامل بيز (B.F.) للنماذج المقترحة

النماذج المقترحة	B.F.	القرار حول قبول الفرضية الصفرية
الاول	111.2249	مؤشر قوي
الثاني	190.2140	مؤشر حاسم
الثالث	172.3547	مؤشر حاسم
الرابع	244.3031	مؤشر حاسم
الخامس	200.1452	مؤشر حاسم
السادس	130.8899	مؤشر قوي
السابع	282.9175	مؤشر حاسم
الثامن	250.3243	مؤشر حاسم
العاشر	92.1478	مؤشر قوي
الحادي عشر	230.1470	مؤشر حاسم
الثاني عشر	192.1478	مؤشر حاسم
الثالث عشر	140.2151	مؤشر قوي
الرابع عشر	160.6247	مؤشر حاسم
الخامس عشر	166.3254	مؤشر حاسم
السادس عشر	101.2452	مؤشر قوي
السابع عشر	246.1240	مؤشر حاسم
الثامن عشر	155.2433	مؤشر حاسم

نلاحظ من نتيجة الجدول (4) سوف يتم قبول الفرضية الصفرية (H_0) وهذا يعني أن العينة سحبت من مجتمع ديربن الحيزي عندما يكون خطأ النموذج يتبع توزيع t متعدد المتغيرات.

6.الاستنتاجات:

توصل البحث الى اهم الاستنتاجات النظرية والتجريبية منها:

1. المقدر البيزي لمتجه المعلمات $\left(\underline{\beta}\right)$ عند توفر معلومات مسبقة غير خبرية هو نفس مقدر الامكان الاعظم.
2. مقدر الامكان الاعظم لـ $\left(\underline{\beta}\right)$ لنموذج ديربن الحيزي للخطأ الطبيعي المتعدد مساوياً لمقدر الامكان الاعظم لـ $\left(\underline{\beta}\right)$ لنموذج ديربن الحيزي عندما يكون الخطأ يتبع توزيع t المتعدد المتغيرات.
3. انخفاض قيم معيار متوسط مربعات الخطأ كلما زادت حجم العينة وقيمة درجة الحرية ولجميع النماذج المقترحة.
4. تفوق المقدر البيزي عند استعمال مصفوفة التجاورات الخطية ولجميع النماذج المقترحة.
5. العينة التي استخدمت في عملية التوليد سحبت من مجتمع ديربن الحيزي عندما يتبع الخطأ توزيع t متعدد المتغيرات من خلال معيار عامل بيز.

المصادر:

[1] ابو الشعير، محمود جواد و الصراف، نزار مصطفى (2018) " **الانحدار الخطي: رؤئ من القاعدة الى القمة"**، مطبعة عبدالسلام ، الطبعة الاولى، كلية الرافدين الجامعة ، العراق.

[2] Atikah, N., Widodo, B., Rahardjo, S., Kholifia, N., & Afifah, D. L. (2021)" **The efficiency of Spatial Durbin Model (SDM) parameters estimation on advertisement tax revenue in Malang City"**, Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1821, No. 1, p. 012012). IOP Publishing.

[3] Bekti, R. D. (2012**)" Spatial Durbin model to identify influential factors of diarrhea"**, Journal of Mathematics and Statistics, 8(3), p.p. 396-402.

[4] Jefferys, H.(1961), " Theory of Probability", Clarenden Press, Oxford, London .U.K .

[5] Keysers, C., Gazzola, V., & Wagenmakers, E. J. (2020). "**Using Bayes factor hypothesis testing in neuroscience to establish evidence of absence"**, Nature neuroscience, 23(7), p.p.788-799.

[6] Kotz, S., & Nadarajah, S. (2004)" **Multivariate t-distributions and their applications**", Cambridge university press.

[7] Lemoine, N. P. (2019)" **Moving beyond noninformative priors: why and how to choose weakly informative priors in Bayesian analyses**" , Oikos, 128(7), p.p.912-928**.**

[8] Llera, A., & Beckmann, C. F. (2016)" **Estimating an inverse gamma distribution**", arXiv preprint arXiv:1605.01019.

[9] Mur, J., & Angulo, A. (2006)" **The spatial Durbin model and the common factor tests**" , Spatial Economic Analysis, 1(2), p.p. 207-226.

[10] Wang, H., Cui, H., & Zhao, Q. (2021)" **Effect of green technology innovation on green total factor productivity in China: Evidence from spatial Durbin model analysis**", Journal of Cleaner Production, 288, p.125624.

[11] Zhu, Y., Han, X. and Chen, Y. (2020)" **Bayesian estimation and model selection of threshold spatial Durbin model"**, Economics Letters, vol. 188, p.108956.