بعض المقدرات لدالة المخاطرة للتوزيع المقترح(ويبل الأسي_ويبل رايلي) مع التطبيق

1) إستبرق جواد كاظم
2) أ.م.د ريسان عبد الامام زعلان
جامعة البصرة / كلية الإدارة والاقتصاد / قسم الاحصاء

المستخلص :

يتناول هذا البحث اقتراح توزيع جديد ناتج عن خلط التوزيعات المركبة مع بعضها بعضاً إذ إن (التوزيعات المركبة أنها ناتجة أصلاً من توزيعين أو أكثر)، وبذلك نتج عن هذا الخلط توزيع جديد ذو معلمات أكثر لنرى فيما إذا كانت قادرة على تمثيل البيانات المعقدة بصورة أفضل من التوزيعات المركبة، تم استخراج الخصائص الإحصائية للتوزيع المختلط، وتم تقدير معلماته، وكذلك تقدير دالة المخاطرة بطرائق مختلفة، وهي (طريقة الإمكان الأعظم MLE وطريقة المربعات الصغرى OLS) ، وتم استعمله طريقة واحدة في هذا البحث هي طريقة الإمكان الأعظم.

وبأستخدام أسلوب المحاكاة إذ تم توليد البيانات بطريقة القبول و الرفض وتكرار التجربة إذ تم اختيار عدة حجوم للعينات، وهي (25,50,100,200) من أجل معرفة مدى تأثير حجم العينة على النتائج ،إذ تم استعمال عينة بيانات حقيقية متمثلة بتسجيل أزمان الأشتغال لحين العطل لعينة سحبت من دائرة البطاقة الوطنية في محافظة كربلاء المقدسة، وهي عبارة عن 100 جهاز من أجهزة الطابعة من نوع Brother HL.

أظهرت نتائج المحاكاة أن أفضل طريقة هي طريقة الإمكان الأعظم MLE ولجميع أحجام العينات، وأثبتت نتائج الاختبار إن أفضل توزيع احتمالي مقترح من التوزيعات الثلاثة هو التوزيع المختلط المقترح في تمثيل البيانات الحقيقية مقارنة مع التوزيعين المركبين، وبالاعتماد على المعياريين الإحصائيين (ALC,ALCc).

الكلمات المفتاحية: **المخاطرة، التوزيعات المختلطة، طريقة التقدير الإمكان الأعظم ، التوزيعات المركبة، طريقة المربعات الصغرى.**

(Some capabilities of the risk function for the proposed distribution (Exponential Weibull _ Rayleigh Weibull) with application)

1) Eastabraq Jawad Kadhim

2) Asst.Prof.Dr.Raisan Abd Al_imam Zalan

college of Administration and Economics Department of Statistics

University of Basrah

Abstract :

This research discusses a new proposed distribution resulting from mixing composite distributions with each other, considering that (composite distributions are originally derived from two or more distributions). This mixing produces a new distribution with more parameters to see whether it is capable of representing complex data better than composite distributions. Then, its statistical properties were extracted, and its parameters as well as the risk function were estimated using three different methods, which are (Maximum Likelihood Estimation MLE, Ordinary Least Squares OLS, and Cramér–von Mises CVM method). Only one method was used in this research, which is the Maximum Likelihood Estimation method. Using the simulation method, data were generated through the accept-reject approach and the experiment was repeated with several sample sizes chosen (25, 50, 100, 200) to determine the impact of sample size on the results. A real data sample was used, representing operating times until failure for a sample drawn from the National ID office in Karbala Governorate, consisting of 100 Brother HL printer devices.

The simulation results showed that the best method is the Maximum Likelihood Estimation (MLE) method for all sample sizes. The test results confirmed that the best proposed probability distribution among the three distributions is the proposed mixture distribution when representing the real data, compared to the two compound distributions, based on the two statistical criteria (ALC, ALCc, BIC).

Keywords: Keywords: Risk, mixture distributions, maximum likelihood estimation method, composite distributions, least squares method.

المقدمة:

إن التوزيعات الإحصائية مهمة جداً لوصف الظواهر الطبيعية، وقد اكتسبت نمذجة البيانات نطاق واسع في العديد من المجالات، وتم تطوير العديد من التوزيعات الكلاسيكية عن طريق التركيب أو التوسعة او التحويل أو الخلط للحصول على توزيعات ذات مرونة عالية لنمذجة البيانات، وفي هذا البحث تم استعمال خلط التوزيعات المركبة (ويبل_ الأسي) والتوزيع (ويبل_ رايلي) للحصول على توزيع جديد اكثر كفاءة. وكذلك تستعمل النماذج المختلطة في نمذجة العديد من الظواهر في مختلف المجالات مثل علم الأحياء، علم الوراثة، علم الاقتصاد وغيرها من العلوم الطبيعية والاجتماعية.

المبحث الأول: منهجية البحث

1. مشكلة البحث

إن التوزيعات المستعملة في نمذجة البيانات يجب أن تكون توزيعات جيدة وملائمة للتوصل الى تحليل إحصائي جيد وذو كفاءة عالية، وإن التوزيعات الكلاسيكية إصبحت أكثر تعقيد واقل ملائمة لتفسير العديد من الظواهرُ. مما جعل الباحثين يطورون التوزيعات المفردة من خلال طريقة التحويل أو التركيب أو الخلط للحصول على توزيعات أكثر انسجام ومرونة.

2- أهداف البحث

1- اقتراح توزيع مختلط جديد من توزيعيين مركبين هما(ويبل_الأسي_ ويبل_رايلي).
2- استخراج دالة المخاطرة.
3- تقدير التوزيع المختلط بعدة طرائق.
4- تحديد أفضل طريقة لتقدير دالة المخاطرة للبيانات الحقيقية.

3- الدراسات السابقة

1- قام الباحث (Yilmaz) عام 2015، بخلط توزيعات أسية ثنائية المكونات للحصول على توزيعات أسية مختلطة، وقد تم إيجاد الخصائص الإحصائية للتوزيع المقترح، كما وقدرت معلماته بطريقة العزوم وطريقة الإمكان الأعظم والمربعات الصغرى، وقد توصلت النتائج إلى إن طريقة الإمكان الأعظم هي أفضل تقدير RMSE.
2- توصل الباحث (الفهد) عام 2018، أنه عند دمج توزيع كاما مع توزيع اللوغارتيم الطبيعي ينتج توزيع مختلط جديد (توزيع كابا)، وقدرت معلماته بعدة طرائق (الإمكان الأعظم، وتقدير العزوم الخطية، والعزوم في حالة التحيز، والعزوم الكمية الخطية، والمقدرات الجزئية)، وتوصلت النتائج إلى أن أفضل طريقة هي طريقة العزوم الكمية الخطية.
3- قدم الباحثان (Hussain and Shreef) عام2021، خلط التوزيعات الثلاثة (الأسي وكاما ويبل) للحصول على توزيع مختلط جديد أكثر مرونة من التوزيعات المفردة وقد تم إيجاد الخصائص الإحصائية للتوزيع المختلط، وتم تقدير معلماته بطريقة الإمكان الأعظم والمربعات الصغرى، وكانت أفضل طريقة من العينات الصغيرة هي طريقة المربعات الصغرى بينا إن الإمكان الأعظم هي الأفضل في العينات الكبيرة.
4- تناول الباحثان (A.A.Bhat and S.P.Ahmad) عام 2021، التوزيع المختلط المقترح (كاما_رايلي) الناتج من مزج (توزيع كاما مع توزيع رايلي)، وتم إيجاد الخصائص الإحصائية للتوزيع المقترح، وقدرت معلماته بطريقة الإمكان الأعظم، وبينت النتائج أن التوزيع المختلط هو الأفضل، كما وإن المقدرات بطريقة MLE هي الأفضل.

5- قاما الباحثان (Abdulhussein and Zalan) عام 2022، بدراسة مزج التوزيع Burr III المبتور مع توزيع دالة القوة لينتج توزيع مختلط جديد (Power function_Truncated Burr III)، وقدرت معلماته بطريقة الإمكان الأعظم وطريقة المربعات الصغرى والمقدرات الجزئية، وكذلك إيجاد الخصائص الإحصائية للتوزيع المقترح، وتوصلت النتائج أن طريقة المقدرات التجزئيية هي الأفضل.

1- المبحث الثاني: الجانب النظري

1- دالة المخاطرة :

وهي احتمال فشل المفردة أو النظام خلال الفترة الزمنية $(x, x+\Delta x)$، إذ إن المفردة والنظام يعمل حتى الزمن t وتسمى دالة المخاطرة بمتوسط الفشل ويرمز لها بالرمز h(x) أي أن:

$$h(x) = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{R(x)} \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

إن دالة الخطورة h(x) تتناسب عكسياً مع دالة المعولية R(x) ، وطردياً مع دالة الكثافة الاحتمالية f(x)، لذلك فإن العلاقة التي تربط هذه المفردات، هي:

$$h(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial (x)} * \frac{1}{R(x)} = \frac{f(x)}{R(x)}$$

2- التوزيعات المركبة (Compound distribution)

التوزيعات المركبة هي التوزيعات الأكثر مرونة من التوزيعات الكلاسيكية، وهي تنتج من تركيب توزيعين من التوزيعات المفردة لتمثيل بعض المشاهدات ، المركبة وتكون هذه التوزيعات هي توزيعات أوقات الفشل الشائعة ، سيتم تناول التوزيعات المركبة خلال هذا البحث:

2- التوزيع المركب ويبل-الأسي Weibull_Exponential Distribution:

هو نموذج احتمالي مركب ذو ثلاث معلمات:-

إذ إن دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأسي:

$$f(x) = \beta e^{-\beta X} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ X > 0$$

دالة التوزيع التراكمية للتوزيع الأسي:

$$F(x) = 1 - e^{-\beta X} \quad \dots\dots\dots\dots 0 < X < \infty$$

دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل:

$$f(x) = \alpha\theta X^{\theta-1} e^{-\alpha X^{\theta}} \quad \dots\dots\dots\dots X, \theta, \alpha > 0$$

α: تمثل معلمة القياس

θ: تمثل معلمة الشكل

دالة التراكمية لتوزيع ويبل:

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha X^{\theta}} \quad \dots\dots\dots\dots X > 0$$

دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المركب(ويبل- الأسي):

$$f_{e.w} = \alpha\beta^{\theta}\theta X^{\theta-1}e^{-\alpha\beta^{\theta}X^{\theta}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots X > 0 \dots\dots\dots$$

دالة التراكمية للتوزيع المركب (ويبل- الأسي):

$$F_{e.w} = 1 - e^{-\alpha\beta^{\theta}X^{\theta}} \dots\dots\dots$$

دالة المعولية للتوزيع المركب (ويبل- الأسي):

$$R(x)_{e.w} = e^{-\alpha\beta^{\theta}X^{\theta}} \dots\dots\dots\dots$$

دالة المخاطرة للتوزيع المركب:

$$h(x)_{e.w} = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{\alpha\beta^{\theta}\theta X^{\theta-1}e^{-\alpha\beta^{\theta}X^{\theta}}}{e^{-\alpha\beta^{\theta}X^{\theta}}} = \alpha\beta^{\theta}\theta X^{\theta-1} \dots\dots\dots$$

3- التوزيع المركب (ويبل_ رايلي) Weibull Rayleigh Distribution

دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع ويبل:

$$f(x,\alpha,\theta) = \alpha\theta X^{\theta-1}e^{-\alpha x^{\theta}} \quad x,\alpha,\theta > 0$$

دالة التوزيع التراكمية لتوزيع ويبل:

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha X^{\theta}} \quad \dots\dots\dots\dots X > 0$$

دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع رايلي:

$$f(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2} \dots\dots\dots x > 0$$

دالة التوزيع التراكمية لرايلي:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x^2}$$

هو توزيع احتمالي مركب ذو ثلاث معلمات، إذ إن الدالة الاحتمالية تكون بالشكل الآتي:

$$f_{wR}(x,\lambda,\alpha,\theta) = 2\lambda\alpha\theta x e^{\alpha\theta x^2} e^{-\lambda(e^{\alpha\theta x^2}-1)} \qquad X > 0 \dots\dots\dots$$

الدالة التراكمية للتوزيع المركب تكون بالصيغة التالية:

$$F_{wR} = 1 - e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta x^2}-1\right)} \dots\dots\dots$$

أما بالنسبة لدالة المعولية للتوزيع المركب فتكون كالآتي:

$$R_{WR(x)} = 1 - F_{wR(x)}$$

$$R_{wR} = e^{-\lambda(e^{\alpha\theta x^2}-1)} \dots\dots\dots$$

دالة المخاطرة للتوزيع المركب تكون بالصيغة الآتية:

$$h_{wR(x)} = 2\lambda\alpha\theta X e^{\alpha\theta x^2} \dots\dots\dots\dots$$

3- خلط التوزيعات Mix Distribution

التوزيعات المختلطة وهي التوزيعات الاحتمالية التي تم اشتقاقها عن طريق مجموعة من التوزيعات العشوائية المفردة أو المركبة، وتنشأ عندما تكون المجتمعات غير متجانسة تكون التوزيعات المختلفة ذات نسبة وزنية ثابتة.

ونفترض أن X متغير عشوائي مستمر ودالة الكثافة الاحتمالية $fi(x)$ ،وبنسب ثابتة (Wi) تكون الدالة المختلطة كالآتي:

$$m(xi) = \sum_{i=1}^{n} wif(x) \qquad 0 \le wi \le 1, \qquad i = 1, \dots . n$$

$$\sum_{i=1}^{n} wi = 1$$

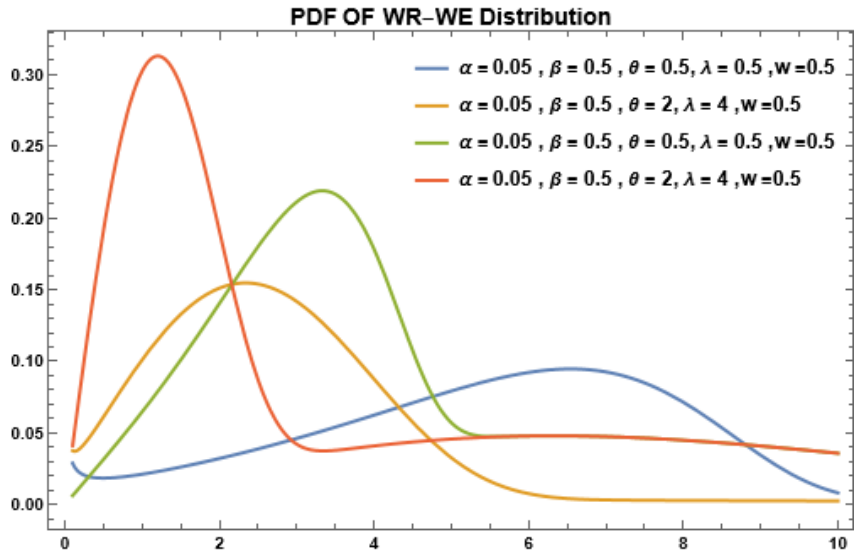
إذ إن :

wi: معلمة الخلط أو معلمة الوزن.

fi(x): دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيعات المراد خلطها.

M(xi): دالة الكثافة الاحتمالية المختلطة.

دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المختلط المقترح: التوزيع المختلط المقترح (ويبل- الأسي و ويبل- رايلي)



$$f(x)^* = w_1 f_1(x) + (1 - w_1) f_2(x)$$

$$f_1(x) = \alpha\beta^\theta \theta x^{\theta-1} e^{-\alpha\beta^\theta x^\theta} \qquad x > 0$$

$$f_2(x) = 2\lambda\alpha\theta x e^{\alpha\theta x^2} e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta x^2}-1\right)} \qquad x > 0$$

$$f(x)^* = w_1 \left[\alpha\beta^\theta \theta x^{\theta-1} e^{-\alpha\beta^\theta x^\theta}\right] + (1 - w_1)\left[2\lambda\alpha\theta x e^{\alpha\theta x^2} e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta x^2}-1\right)}\right] \ldots\ldots$$

$$f(x)^* = w_1 \int_0^\infty \alpha\beta^\theta \theta x^{\theta-1} e^{-\alpha\beta^\theta x^\theta} + (1 - w_1) \int_0^\infty 2\lambda\alpha\theta x e^{\alpha\theta x^2} e^{-\lambda(e^{\alpha\theta x^2}-1)}\, e^{-\lambda(e^{\alpha\theta x^2}-1)}$$

$$= w_1[0 + 1] + (1 - w_1)[0 + 1]$$

$$= w_1 + (1 - w_1) = 1$$

الدالة التراكمية تكون صيغتها كالآتي:

$$F(x)^* = w_1 F_1 + (1 - w_1) F_2$$

$$F(x)^* = 1 + e^{\lambda - e^{x^2\alpha\theta}\lambda}(w - 1) - e^{-\alpha(x\beta)^\theta} w$$

اما بالنسبة لدالة المعولية فتكون كالآتي:

$$R(x)^* = 1 - F(x)^*$$

$$R(x)^* = 1 - \left[1 + e^{\lambda - e^{x^2\alpha\theta}\lambda}(w - 1) - e^{-\alpha(x\beta)^\theta} w\right]$$

دالة المخاطرة تكون كالآتي:

$$h(x)^* = \frac{f(x)^*}{R(x)^*}$$

$$h(x)^* = \frac{w_1\alpha\beta^\theta\theta x^{\theta-1}e^{-\alpha\beta^\theta x^\theta} + (1-w_1)2\lambda\alpha\theta x e^{\alpha\theta x^2}e^{-\lambda(e^{\alpha\theta x^2}-1)}}{1-\left[1+e^{\lambda-e^{x^2\alpha\theta}\lambda}(w-1)-e^{-\alpha(x\beta)^\theta}w\right]} \dots\dots$$

4- طرائق التقدير

طريقة الإمكان الأعظم Method Of Maximum Likelihood

إن هذه الطريقة هي احدى الطرائق الأكثر استخداماً في تقدير معلمات نماذج الخلط، لما تمتلكه من خواص تميزها عن بقية الطرائق واحد هذه الخواص هي خاصية التقدير المتحيز بأقل تباين ممكن، Minimum variance unbiased estimators، وخاصية الثبات invarianmt property وتكون مقدرات هذه الطريقة بأنها قيم المعلمات التي تجعل دالة الإمكان للمشاهدات في نهايتها العظمى، لتكن (x1,x2....xn) مفردات عينة عشوائية بحجم n مسحوبة من مجتمع يمتلك دالة الكثافة الاحتمالية معلومة، فإن دالة التوزيع المشترك للمشاهدات، هي كما يلي :

$$f(x1,x2\dots xn)_n = \prod_{i=1}^{n}\lambda(xi)e^{-m(xn)} \dots$$

يتم اشتقاق التوزيع المختلط بطريقة الإمكان الأعظم كالآتي:

1- التوزيع المختلط المقترح (ويبل الأسي- ويبل رايلي)

$$f(x)^* = w_1\left[\alpha\beta^\theta\theta x^{\theta-1}e^{-\alpha\beta^\theta x^\theta}\right] + (1-w_1)\left[2\lambda\alpha\theta x e^{\alpha\theta x^2}e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta x^2}-1\right)}\right]$$

$$F(x) = 1 + e^{\lambda-e^{x^2\alpha\theta}\lambda}(w-1) - e^{-\alpha(x\beta)^\theta}w$$

$$Lf(x)^* = \sum_{i=1}^{n}\text{Log}[2e^{-((-1+e^{\alpha\theta x_i^2})\lambda)+\alpha\theta x_i^2}(1-w)\alpha\theta\lambda x_i + e^{-\alpha\beta^\theta x_i^\theta}w\alpha\beta^\theta\theta x_i^{-1+\theta}]$$

$$\frac{dlf}{d\alpha} = \sum_{i=1}^{n}(2e^{-\left(\left(-1+e^{\alpha\theta x_i^2}\right)\lambda\right)+\alpha\theta x_i^2}(1-w)\theta\lambda x_i + e^{-\alpha\beta^\theta x_i^\theta}w\beta^\theta\theta x_i^{-1+\theta} - e^{-\alpha\beta^\theta x_i^\theta}w\alpha\beta^{2\theta}\theta x_i^{-1+2\theta}$$
$$+ 2(1-w)\alpha\theta\lambda x_i(e^{-\left(\left(-1+e^{\alpha\theta x_i^2}\right)\lambda\right)+\alpha\theta x_i^2}\theta x_i^2$$
$$- e^{-\left(\left(-1+e^{\alpha\theta x_i^2}\right)\lambda\right)+2\alpha\theta x_i^2}\theta\lambda x_i^2))/(2e^{-\left(\left(-1+e^{\alpha\theta x_i^2}\right)\lambda\right)+\alpha\theta x_i^2}(1-w)\alpha\theta\lambda x_i$$
$$+ e^{-\alpha\beta^\theta x_i^\theta}w\alpha\beta^\theta\theta x_i^{-1+\theta}) \dots$$

$$\frac{dlf}{d\beta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{-\alpha\beta^{\theta}x_i^{\theta}}w\alpha\beta^{-1+\theta}\theta^2x_i^{-1+\theta}-e^{-\alpha\beta^{\theta}x_i^{\theta}}w\alpha^2\beta^{-1+2\theta}\theta^2x_i^{-1+2\theta}}{2e^{-((-1+e^{\alpha\theta x_i^2})\lambda)+\alpha\theta x_i^2}(1-w)\alpha\theta\lambda x_i+e^{-\alpha\beta^{\theta}x_i^{\theta}}w\alpha\beta^{\theta}\theta x_i^{-1+\theta}}\ldots.$$

$$\frac{\boldsymbol{dlf}}{\boldsymbol{d\theta}}$$

$$=\sum\frac{\left(2e^{-\left(\left(-1+e^{\alpha\theta x_i^2}\right)\lambda\right)+\alpha\theta x_i^2}(1-w)\alpha\lambda x_i+e^{-\alpha\beta^{\theta}x_i^{\theta}}w\alpha\beta^{\theta}x_i^{-1+\theta}+e^{-\alpha\beta^{\theta}x_i^{\theta}}w\alpha\beta^{\theta}\theta\mathrm{Log}[\beta]x_i^{-1+\theta}\right)}{2e^{-\left(\left(-1+e^{\alpha\theta x_i^2}\right)\lambda\right)+\alpha\theta x_i^2}(1-w)\alpha\theta\lambda x_i+e^{-\alpha\beta^{\theta}x_i^{\theta}}w\alpha\beta^{\theta}\theta x_i^{-1+\theta})}$$

$$+\frac{+e^{-\alpha\beta^{\theta}x_i^{\theta}}w\alpha\beta^{\theta}\theta\mathrm{Log}[x_i]x_i^{-1+\theta}+2(1-w)\alpha\theta\lambda x_i(e^{-((-1+e^{\alpha\theta x_i^2})\lambda)+\alpha\theta x_i^2}\alpha x_i^2-e^{-((-1+e^{\alpha\theta x_i^2})\lambda)+2\alpha\theta x_i^2}\alpha\lambda x_i^2)}{2e^{-\left(\left(-1+e^{\alpha\theta x_i^2}\right)\lambda\right)+\alpha\theta x_i^2}(1-w)\alpha\theta\lambda x_i+e^{-\alpha\beta^{\theta}x_i^{\theta}}w\alpha\beta^{\theta}\theta x_i^{-1+\theta})}$$

$$+\frac{w\alpha\beta^{\theta}\theta x_i^{-1+\theta}(-e^{-\alpha\beta^{\theta}x_i^{\theta}}\alpha\beta^{\theta}\mathrm{Log}[\beta]x_i^{\theta}-e^{-\alpha\beta^{\theta}x_i^{\theta}}\alpha\beta^{\theta}\mathrm{Log}[x_i]x_i^{\theta}))}{2e^{-\left(\left(-1+e^{\alpha\theta x_i^2}\right)\lambda\right)+\alpha\theta x_i^2}(1-w)\alpha\theta\lambda x_i+e^{-\alpha\beta^{\theta}x_i^{\theta}}w\alpha\beta^{\theta}\theta x_i^{-1+\theta})}\ldots$$

$$\frac{dlf}{d\lambda}=\sum_{i=1}^{n}\frac{2e^{-\left(\left(-1+e^{\alpha\theta x_i^2}\right)\lambda\right)+\alpha\theta x_i^2}(1-w)\alpha\theta x_i+2(e^{-\left(\left(-1+e^{\alpha\theta x_i^2}\right)\lambda\right)+\alpha\theta x_i^2}}{2e^{-\left(\left(-1+e^{\alpha\theta x_i^2}\right)\lambda\right)+\alpha\theta x_i^2}(1-w)\alpha\theta\lambda x_i+e^{-\alpha\beta^{\theta}x_i^{\theta}}w\alpha\beta^{\theta}\theta x_i^{-1+\theta}}$$

$$-\frac{-e^{-\left(\left(-1+e^{\alpha\theta x_i^2}\right)\lambda\right)+2\alpha\theta x_i^2})(1-w)\alpha\theta\lambda x_i}{2e^{-\left(\left(-1+e^{\alpha\theta x_i^2}\right)\lambda\right)+\alpha\theta x_i^2}(1-w)\alpha\theta\lambda x_i+e^{-\alpha\beta^{\theta}x_i^{\theta}}w\alpha\beta^{\theta}\theta x_i^{-1+\theta}}\ldots$$

$$\frac{dlf}{dw}=\sum_{i=1}^{n}\frac{-2e^{-((-1+e^{\alpha\theta x_i^2})\lambda)+\alpha\theta x_i^2}\alpha\theta\lambda x_i+e^{-\alpha\beta^{\theta}x_i^{\theta}}\alpha\beta^{\theta}\theta x_i^{-1+\theta}}{2e^{-((-1+e^{\alpha\theta x_i^2})\lambda)+\alpha\theta x_i^2}(1-w)\alpha\theta\lambda x_i+e^{-\alpha\beta^{\theta}x_i^{\theta}}w\alpha\beta^{\theta}\theta x_i^{-1+\theta}}\ldots$$

طريقة المربعات الصغرى

تعد طريقة المربعات الصغرى من الطرائق المهمة في عملية التقدير، لأنه لها مميزات عدة وهي غير متحيزة ومتسقة، وإن المبدأ الأساس لهذه الطريقة هو تصغير مجموع مربعات الخطأ إلى أقل ما يمكن، وفي تقدير معالم التوزيعات وهذه الطريقة تعتمد على وجود علاقة بين متغيرين أو أكثر، فإذا كانت لدينا عشوائية حجمها n من توزيع معين G(Xj) له دالة cdf معلومة فإن:

$$E\left(F(X_j)\right)=\frac{j}{n+1}$$

$$V\left(F(X_j)\right) = \frac{j(n-j+1)}{(n+1)^2(n+2)}$$

بأستخدام التوقع والتباين يمكن الحصول على مقدرات المربعات الصغرى كالآتي:

$$A = \sum_{j=1}^{n}(F(X_j) - \frac{j}{n+1})^2 \dots\dots\dots$$

المبحث الثالث: الجانب العملي

وصف تجارب المحاكاة للتوزيع المقترح

يتم في هذا الجانب مناقشة نتائج المحاكاة المستخدمة في مقارنة طرائق التقدير المستعملة لتقدير المعلمات ودالة المخاطرة للتوزيع المختلط (ويبل الأسي_ويبل رايلي)، و تم تعيين القيم الافتراضية عن طريق إجراء تجارب متكررة واختبار النتائج، وقد تم افتراض ثمانية نماذج للقيم واعطت فكرة عن المقدرات ونمط سلوكها، ثم تحديد تلك النماذج كما موضح بالجدول الآتي:

الجدول: النماذج المقترحة والقيم الافتراضية لمعلمات التوزيع المختلط (ويبل_الأسي -ويبل_رايلي)

Model	α	β	Θ	λ	w
1	1.5	1.5	1.5	1	0.05
2	1.5	1.5	3	1	0.5
3	1.5	4	1.5	2.5	0.05
4	1.5	4	3	2.5	0.5
5	3.5	1.5	1.5	1	0.05
6	3.5	1.5	3	1.5	0.8
7	3.5	4	1.5	3	0.5
8	3.5	4	3	1	0.5

المصدر: إعداد الباحثة

1- اختيار حجوم العينات

افترضت مجموعة من حجوم العينات وذلك لدراسة مدى تأثير حجم العينة على كفاءة ودقة النتائج، وكما مبين في الجدول:

الجدول :حجوم العينات

الوصف	صغيرة	متوسطة	كبيرة	
العينة	25	50	100	**200**

المصدر: إعداد الباحثة

2- الخطوة الثانية

يتم توليد عينة عشوائية تتبع توزيع (ويبل_الأسي - ويبل_رايلي) باستعمال برنامج (Mathematica 14)، وبأستعمال طريقة الرفض والقبول نتيجة التعقيد في دالة التوزيع التراكمي للتوزيع .

3- الخطوة الثالثة

تم تقدير معلمات توزيع(ويبل_الأسي - ويبل_رايلي) لكل طريقة من طرائق التقدير.

4- الخطوة الرابعة

يتم في هذه الخطوة تحديد افضل طريقة عند كل حجم عينة ولكل نموذج بالاعتماد على إعطاء رتب لمتوسط مربعات الخطأ لكل معلمة ونموذج، وأن أقل رتبة هي العينة الأفضل من بين النماذج.

5- الخطوة الخامسة

نحدد أفضل نموذج لأفضل طريقة تقدير

مناقشة تجارب المحاكاة

تم تنفيذ برنامج المحاكاة، والحصول على نتائج تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لدالة المخاطرة لتوزيع(ويبل_الأسي ويبل_رايلي)، ولكل طريقة من طرائق التقدير.

الجدول: الرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لتقدير دالة المخاطرة بحسب حجوم العينات لتوزيع (ويبل_الأسي- ويبل_رايلي)

N	Sum of Ranks	MLE	CVM	Best
25	$\sum Rank$	10	14	MLE
	Partial Rank	1	2	MLE
50	$\sum Rank$	8	17	MLE
	Partial Rank	1	2	MLE
100	$\sum Rank$	10	16	MLE
	Partial Rank	1	2	MLE
200	$\sum Rank$	8	16	MLE
	Partial Rank	1	2	MLE
$\sum\sum Rank$		36	63	MLE
Partial Rank		1	2	MLE

نلاحظ من الجدول كالآتي:

1- تصدرت طريقة الإمكان الأعظم MLE المرتبة الأولى عند حجوم العينات (25,50,100,200)، ولجميع حجوم العينات بينما حصلت طريقة المربعات الصغرى المرتبة الثانية

2- اثبتت طريقة الإمكان الأعظم MLE افضليتها لأمتلاكها أقل رتبة (Overall Rank) في جميع حجوم العينات.

الجدول: رتب متوسطات مربعات الخطأ التكاملي لتقديرات طريقة الإمكان الأعظم MLE عند حجم العينة (n=100) للتوزيع(ويبل_الأسي ويبل_رايلي)

Model	IMSE	Best
M1	0.00085	M5
M2	0.00111	
M3	0.00085	
M4	0.00094	
M5	0.00072	
M6	0.00086	
M7	0.00133	
M8	0.00115	

ويتم إيجاد أفضل انموذج للتقدير بواسطة استعمال رتب متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لطريقة الإمكان الأعظم عند حجوم العينات المختلفة هو النموذج الخامس.

الجانب التطبيقي

يتضمن هذا الجزء عينة البحث المتمثلة بتسجيل ازمان الاشغال لحين العطل لعينة سحبت من دائرة البطاقة الوطنية في محافظة كربلاء المقدسة، وهي عبارة عن 100 جهاز من أجهزة الطابعة من نوع Brother HL، إذ تستخدم هذه الأجهزة في الطبع للمستمسكات الثبوتية والكتب الرسمية للدائرة، تم تسجيل هذه الأزمان من وقت بدء اشغال المنظومة بتاريخ(2016/2/22) في الدائرة الى تاريخ(2021/1/31).

الجدول: أوقات تشغيل أجهزة الطابعة لحين العطل للفترة ((2016/2/22)_(2021/1/31))مقاسة بالسنوات

1.5	1.9	2.2	2.4	2.6	2.7	2.9	3.1	3.3	3.6
1.5	1.9	2.2	2.4	2.6	2.8	2.9	3.1	3.3	3.7
1.6	2	2.2	2.4	2.6	2.8	2.9	3.1	3.4	3.7
1.6	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3	3.1	3.4	3.8
1.7	2	2.6	2.4	2.6	2.8	3	3.2	3.4	3.9
1.7	2	2.3	2.5	2.7	2.8	3	3.2	3.4	4
1.8	2.1	2.3	2.5	2.7	2.8	3	3.2	3.5	4.1
1.8	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3	3.2	3.5	4.2
1.8	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3	3.5	4.2
1.9	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3	3.6	4.7

اختيار حسن المطابقة

في هذا الاختبار ولمعرفة هل ان البيانات في الجدول أعلاه تتوزع بحسب التوزيعات الاحتمالية المختلطة المقترحة، وبحسب الفرضية الآتية:

$H_{\circ}: The\ data\ have\ distributios$

$H_1: The\ data\ does\ not\ have\ distributions$

وإن الفرضية أعلاه يتم اختبارها على وفق الاختبارات الخاصة باختبار حسن المطابقة.

الجدول: قيم إحصاءات الاختبار ونتائج اختبار حسن المطابقة التي تم الحصول عليها من نتائج المحاكاة.

Dist	A	β	θ	μ	λ	w	P-Value		
							AndersonDarlingTest	CramerVonMisesTest	Kolmogorov-Smirnov
WE-ER	1.7051	0.000589	0.10022	_	0.25402	0.000045	0.0665443	0.138153	0.14873
WR	2.66739	-	0.0661912	-	0.233876	-	0.062057	0.123056	0.172101
WE	0.0767197	0.583926	4.56466	-	-	-	0.073276	0.13215	0.12643

المصدر: من إعداد الباحثة

نلاحظ من الجدول في أعلاه مايلي:

1- تبين أن قيم المعلمات المقدرة الناتجة من تطبيق البيانات الحقيقية لعينة البحث متوافقة مع القيم المفترضة للمعلمات في الجانب التجريبي.
2- أن قيمة (P-Value) في الاختبارات الثلاثة للتوزيعات المقترحة هي أكبر من مستوى المعنوية (0.05)، وعليه فإن القرار الإحصائي يكون هو قبول فرضية العدم أي إن البيانات تتوزع بحسب اختبار حسن التطابق مع التوزيع المعين.

معايير اختيار افضل توزيع Criteria for selection of the best

يساعدنا هذا الاختبار وتم استعمال المعايير لبيان افضلية التوزيعات المختلطة المقترحة مقارنة بالتوزيعات الأصلية، وتم استخلاص النتائج بواسطة برنامج(Mathematica 14) يوضح قيم المعايير اختيار افضل توزيع بالنسبة للتوزيعات المختلطة

Dis	AIC	AICc	BIC
WE_WR	224.735	225.373	232.366
WR	226.735	226.985	234.55
WE	227.149	227.399	234.965

نلاحظ من الجدول أعلاه أن التوزيع المقترح المختلط (ويبل_الأسي_ويبل_رايلي) يمتلك أقل قيمة بالنسبة لمعايير الاختبار (ALC, ALCc, BLC) من التوزيعات المركبة، وبذلك يعد التوزيع المختلط هو الأفضل في تمثيل البيانات الحقيقية.

تقدير دالة المخاطرة للبيانات الحقيقية:

تبين من الجانب التجريبي أن طريقة الإمكان الأعظم هي الطريقة الأفضل في تقدير دالة المخاطرة للتوزيعات المقترحة، والتي تم استعمالها للبيانات الحقيقية، إذا تم الحصول على قيم مقدرات دالة المخاطرة، كما في الجدول الآتي:

الجدول(3-23) يمثل قيم مقدرات دالة المخاطرة والدالة التراكمية ودالة المعولية للبيانات الحقيقية.

i	Ti	CDF	R	H
1	1.5	0.062914	0.937086	0.124317
2	1.5	0.062914	0.937086	0.124317
3	1.6	0.075526	0.924474	0.147412
4	1.6	0.075526	0.924474	0.147412
5	1.7	0.090282	0.909718	0.175259
6	1.7	0.090282	0.909718	0.175259
7	1.8	0.107544	0.892456	0.208985
8	1.8	0.107544	0.892456	0.208985
9	1.8	0.107544	0.892456	0.208985
10	1.9	0.127733	0.872267	0.249991
11	1.9	0.127733	0.872267	0.249991
12	1.9	0.127733	0.872267	0.249991
13	2	0.151323	0.848677	0.300020
14	2	0.151323	0.848677	0.300020
15	2	0.151323	0.848677	0.300020
16	2	0.151323	0.848677	0.300020
17	2.1	0.178838	0.821162	0.361221
18	2.1	0.178838	0.821162	0.361221
19	2.1	0.178838	0.821162	0.361221
20	2.1	0.178838	0.821162	0.361221
21	2.2	0.210835	0.789165	0.436224
22	2.2	0.210835	0.789165	0.436224
23	2.2	0.210835	0.789165	0.436224
24	2.2	0.210835	0.789165	0.436224
25	2.6	0.247869	0.752131	0.528181
26	2.3	0.247869	0.752131	0.528181
27	2.3	0.247869	0.752131	0.528181
28	2.3	0.247869	0.752131	0.528181
29	2.3	0.247869	0.752131	0.528181
30	2.3	0.290435	0.709565	0.640764
31	2.4	0.290435	0.709565	0.640764
32	2.4	0.290435	0.709565	0.640764
33	2.4	0.290435	0.709565	0.640764

34	2.4	0.290435	0.709565	0.640764
35	2.4	0.338880	0.661120	0.778003
36	2.5	0.338880	0.661120	0.778003
37	2.5	0.338880	0.661120	0.778003
38	2.5	0.338880	0.661120	0.778003
39	2.5	0.338880	0.661120	0.778003
40	2.5	0.393262	0.606738	0.943842
41	2.6	0.393262	0.606738	0.943842
42	2.6	0.393262	0.606738	0.943842
43	2.6	0.393262	0.606738	0.943842
44	2.6	0.393262	0.606738	0.943842
45	2.6	0.393262	0.606738	0.943842
46	2.7	0.453181	0.546819	1.141070
47	2.7	0.453181	0.546819	1.141070
48	2.7	0.453181	0.546819	1.141070
49	2.7	0.453181	0.546819	1.141070
50	2.7	0.453181	0.546819	1.141070
51	2.7	0.453181	0.546819	1.141070
52	2.8	0.517565	0.482435	1.369140
53	2.8	0.517565	0.482435	1.369140
54	2.8	0.517565	0.482435	1.369140
55	2.8	0.517565	0.482435	1.369140
56	2.8	0.517565	0.482435	1.369140
57	2.8	0.517565	0.482435	1.369140
58	2.9	0.584488	0.415512	1.620100
59	2.9	0.584488	0.415512	1.620100
60	2.9	0.584488	0.415512	1.620100
61	2.9	0.584488	0.415512	1.620100
62	2.9	0.584488	0.415512	1.620100
63	2.9	0.584488	0.415512	1.620100
64	3	0.651105	0.348895	1.871980
65	3	0.651105	0.348895	1.871980
66	3	0.651105	0.348895	1.871980
67	3	0.651105	0.348895	1.871980
68	3	0.651105	0.348895	1.871980
69	3.1	0.713852	0.286148	2.081220
70	3.1	0.713852	0.286148	2.081220
71	3.1	0.713852	0.286148	2.081220
72	3.1	0.713852	0.286148	2.081220
73	3.1	0.713852	0.286148	2.081220

74	3.1	0.713852	0.286148	2.081220
75	3.2	0.769071	0.230929	2.182980
76	3.2	0.769071	0.230929	2.182980
77	3.2	0.769071	0.230929	2.182980
78	3.2	0.769071	0.230929	2.182980
79	3.3	0.814051	0.185949	2.120520
80	3.3	0.814051	0.185949	2.120520
81	3.3	0.814051	0.185949	2.120520
82	3.3	0.814051	0.185949	2.120520
83	3.4	0.848144	0.151856	1.915160
84	3.4	0.848144	0.151856	1.915160
85	3.4	0.848144	0.151856	1.915160
86	3.4	0.848144	0.151856	1.915160
87	3.5	0.873217	0.126783	1.710200
88	3.5	0.873217	0.126783	1.710200
89	3.5	0.873217	0.126783	1.710200
90	3.6	0.892777	0.107223	1.679990
91	3.6	0.892777	0.107223	1.679990
92	3.7	0.910126	0.089874	1.887750
93	3.7	0.910126	0.089874	1.887750
94	3.8	0.926967	0.073033	2.289570
95	3.9	0.943426	0.056575	2.841510
96	4	0.958842	0.041158	3.549840
97	4.1	0.972366	0.027634	4.454660
98	4.2	0.983257	0.016744	5.614780
99	4.2	0.983257	0.016744	5.614780
100	4.4	0.996018	0.003982	9.039640
Sum	274.8	49.657446	50.342556	139.233136
Mean	2.748	0.49657446	0.50342556	1.39233136

المصدر: إعداد الباحثة

نلاحظ من الجدول في أعلاه ما يأتي:

1- إن دالة المخاطرة h(x) هي دالة متزايدة مع الزمن فكلما زاد مدة عمل الجهاز كلما زاد أحتمال المخاطرة.
2- إن دالة المعولية R(x) تكون كبيرة عندما تكون قيمة الزمن أصغر وتقل عندما تكون قيمة الزمن اكبر، وإن دالة المعولية هي دالة متناقصة مع الزمن، وأن متوسط قيمتها (0.50342556) أي أننا نعول على أجهزة الطابعة بنسبة (0.50342556) لكل سنة.
3- إن قيمة دالة التوزيع التراكمية F(x) للعطل تكون متزايدة مع ازدياد الزمن وتتناقص من تناقص الزمن، وإن متوسط قيمتها يبلغ(0.49657446) لكل سنة تقريباً.
4- عندما نجمع قيم دالة المعولية ودالة التراكمية نحصل على نتيجة الواحد الصحيح وهو الحد الأعلى للاحتمال أي أن أحدهما مكمل للآخر.
5- إن متوسط أوقات الاشتغال لحين العطل يبلغ(2.748) سنة أي أن جهاز الطابعة اقصى طاقته للعمل حتى يعطل هي سنتين وسبعة أشهر تقريباً وهو وقت جيد لعمل الجهاز.

الاستنتاجات:

توصلت نتائج المحاكاة والجانب التطبيقي إلى الاستنتاجات الآتية:

1- إن طريقة الإمكان الأعظم(MLE) حصلت على المرتبة الأولى وهي الطريقة الأفضل عند حساب قيم المقدرات المعلمات ودالة المخاطرة عند جميع حجوم العينات المفترضة (25,50,100,200)
2- إن قيم دالة المخاطرة متزايدة مع الزمن، وان قيم دالة الكثافة التركمية تقع بين الصفر والواحد الصحيح، وهي تزداد وتتناسب طردياً مع الزمن.
3- اثبتت نتائج الاختبار أن أفضل توزيع احتمالي مقترح من التوزيعات الثلاثة هو التوزيع المختلط المقترح في تمثيل البيانات الحقيقية مقارنة مع التوزيعيين المركبين، وبالاعتماد على المعياريين الإحصائيين (ALC,ALCc, BIC).
4- إن طريقة الإمكان الأعظم(MLE) حصلت على المرتبة الأولى وهي الطريقة الأفضل عند حساب قيم مقدرات المعلمات، ودالة المخاطرة عند جميع حجوم العينات المفترضة (25,50,100,200).

التوصيات:

1- نوصي باستعمال طرائق تقدير أخرى لتقدير المعلمات ودالة المخاطرة ، ومقارنتها مع طرائق البحث من أجل معرفة الأفضل من بينها
2- نوصي باستعمال الطرائق البيزية، ومقارنتها مع طرائق التقدير التي اعتمدت في هذا البحث.

المصادر:

1- جعفر، آيات صادق، 2016، "مقارنة بين طريقة الإمكان الأعظم وأسلوب بيز لتقدير بعض عمليات بواسون غير المتجانسة" ،مجلة العلوم الاقتصادية والإدارية ، العدد (97)، المجلد (23).
2- خضير، افتخار باقر، 2024، " نمذجة مؤشرات الصيانة المكائن والمعدات بأستعمال توزيعات عائلة التحويل التكعيبي مع التطبيق" ، رسالة ماجستير، جامعة البصرة ،كلية الإدارة والاقتصاد، قسم الإحصاء.
3- سعيد، شروق عبد الرضا ومجلي، احمد عاجل، 2020، " دراسة تطبيقية لعينة من وفيات مرضى سرطان الثدي في محافظة ذي قار" ، بحث.
4- طالب، حيدر رائد، 2017، "استعمال بعض الطرائق لتقدير معلمات ومعولية لنموذج الاحتمالي المركب(الأسي_ويبل) مع تطبيق عملي" ، المجلة العراقية للعلوم الإدارية، المجلد(13)، العدد (52).
5- طالب، حيدر رائد، 2019، " بعض طرائق تقدير معالم ومعولية التوزيع المركب (الأسي_رايلي) بأستخدام المحاكاة"، بحث.
6- عبدالحسين، غفران خالد، 2022، "تقدير دالة البقاء بأستعمال التوزيع المختلط الجديد (Power Function_ Truncated Burr III) مع التطبيق" ، رسالة ماجستير، جامعة البصرة، كلية الإدارة والاقتصاد، قسم الإحصاء.
7- عبد الرحمن، إيمان قيس، 2022، " إيجاد افضل تقدير لمعلمات ودالة المعولية للتوزيع المركب (باريتو_الأسي المبتور) مع التطبيق"، رسالة ماجستير، جامعة البصرة، كلية الإدارة والاقتصاد ، قسم الإحصاء.
8- عبودي، عماد حازم، وعبد الاحد،عطاف أدوار ،2011، "تقديرات المعولية للتوزيع الأسي لمعلمتين، دراسة مقارنة، مجلة المنصور، المجلد والعدد(15).
9- فهد، باقر كريم، 2018، "اختيار أفضل طريقة لتقدير معلمات توزيع كابا الاحتمالي مع تطبيق عملي" ، رسالة ماجستير، جامعة كربلاء، كلية الإدارة والاقتصاد، علوم الإحصاء.
10- القريشي، أسامة عبدالعزيز كاظم، 2018، " تقدير الدالة المعولية لبيانات مراقبة تخضع توزيع ويبل"، رسالة ماجستير، جامعة كربلاء، كلية الإدارة والاقتصاد، قسم الإحصاء.

11- القريشي، كنعان عدنان أحمد، 2022، "بناء توزيع احتمالي بأستعمال قاعدة (Topp Leone G_Family) لتقدير دالة المعولية مع تطبيق عملي" ، رسالة ماجستير، جامعة كربلاء، كلية الإدارة والاقتصاد ، قسم الإحصاء.

12- نايف، قتيبة نبيل ، وصالح ،سرمد علوان،2009، "مقدر دالة الإمكان الأعظم الحصين لدالة معولية توزيع رايلي" / مجلة جامعة النهرين، المجلد(12)، العدد (3).

13- Abdulhassein and zalan, 2022, “Estmation of the survival function using the new mixed distribution power function_Truncated Burr III with application” , mathematical statistican and Engineering Applications vol(71), No(4).

14- Bhat.A.A and S.P.Ahmad ,2021, “ Mixture of Gamma And Rayleigh Distribution Mathematical Properties and applications”, Journal of Applied Probability and Statistics, Vol(16),No(2).

15- Hussan.J.N and Shreef.A.M , 2021, “Parameters estimation of new mixed weibull Rayleigh and Exponential distribution”,Ibn Al-Haitham International Conference for Pure and Applied Sciences, Journal of Physics vol(1879/1742-6596).

16- Yilmaz.M, 2015, “ Parameter estimation merthods for two _ component mixed exponential distribution”, Journal of the Turkish statistical association, vol(8),No(3).